



Divisão justa

Participantes:

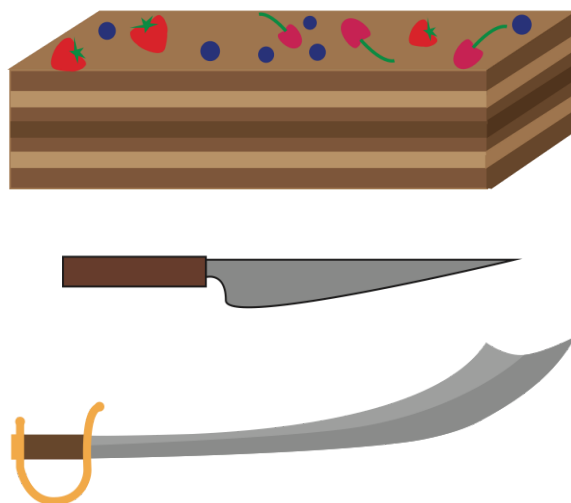
A partir de 12 anos de idade, divididos em grupos de 4 ou 5 pessoas.

Ideia geral:

São propostas diversas técnicas matemáticas de se dividir um bolo entre os participantes, de forma que todos tenham a parte que lhes faz justiça. Em nossa atividade final, dividimos tarefas em vez de bolos. Embora todos queiram minimizar o número de tarefas, em vez de maximizar a fatia de bolo, uma divisão justa é feita com um método similar.

Preparação

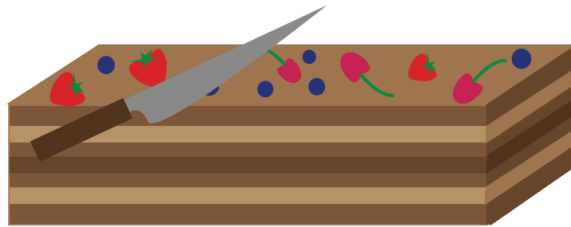
Preparar facas e também um sabre de papelão, bem como bolos de papelão para cada grupo ou, melhor ainda, deixar que os grupos os construam. Não faça um bolo uniforme, de forma que os participantes possam preferir uma parte mais do que outras.



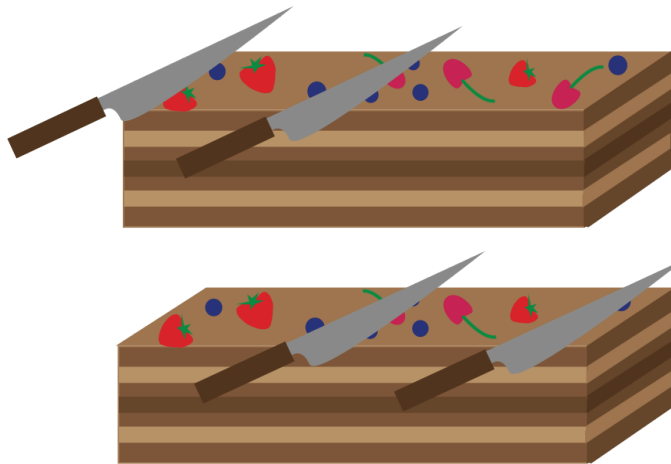
Atividade 1 - Como dividir um bolo em dois sem ficar com inveja da fatia do outro!

O objetivo é dividir e distribuir um bolo entre duas pessoas de forma que nenhuma delas inveje o pedaço recebido pela outra.

- Pergunte ao grupo se alguém consegue pensar em uma estratégia para conseguir isso.
- Proponha a estratégia: “Um corta, o outro escolhe” e tente isso várias vezes com dois participantes. Suponha que Maria corte e Caio escolha. Como Maria deveria cortar para que não fique com inveja de Caio? Essa divisão é chamada “livre de inveja”.



- Tópico de discussão: É melhor ser quem corta ou quem escolhe?
- Como é melhor escolher, Maria propõe refinar a estratégia anterior. Ela diz a Caio: *“Eu moverei duas facas sobre o bolo, até ouvir ‘para’.* Nesta hora, corto o bolo ao longo das posições das duas facas. Então eu escolho o pedaço entre as duas facas ou as duas extremidades. A outra parte será a tua.”
- Discuta: Como Maria deveria segurar suas facas? Quando Caio deveria dizer “para”?



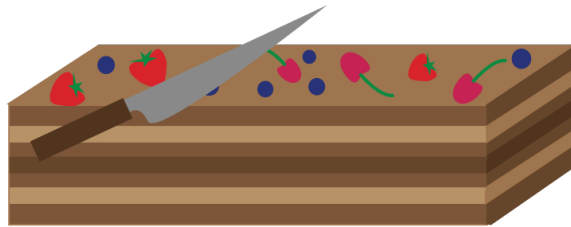
- Se o grupo de participantes não encontrar a estratégia, explique-a: Maria deve sempre segurar as suas duas facas de forma a estar sempre feliz com qualquer das duas porções (as facas não precisam andar à mesma velocidade). Caio deveria dizer “Para!” quando ele também estiver igualmente contente com as duas porções.

- Mas por que temos certeza de que existe pelo menos um momento em que Caio fica igualmente feliz com as duas porções? Se os participantes não encontrarem uma explicação, proponha e discuta esta abaixo.
- Aqui temos a explicação de por que existe pelo menos um momento em que Caio fica igualmente feliz com as duas porções. No começo, uma faca está no extremo esquerdo do bolo, e a outra divide o bolo em duas porções. Suponha que Caio prefira o pedaço da direita (que é a porção “fora das facas”). Ao fim, quando uma faca estiver no extremo direito, o mesmo pedaço preferido estará entre as facas. Portanto, no meio do caminho, houve uma posição em que os dois pedaços eram igualmente bons para ele (esta é uma aplicação do Teorema do Valor Intermediário).
- Chamamos esse tipo de divisão de “equitativa”, porque tanto Maria quanto Caio recebem uma porção que tem igual valor para ambos. Uma divisão equitativa é livre de inveja, mas o inverso pode não valer.

Atividade 2 - Uma divisão proporcional de um bolo entre n pessoas

O objetivo desta atividade é que cada participante receba uma porção que considere valer pelo menos $1/n$ do bolo inteiro.

- Pergunte se alguém quer propor um método.
- Aqui temos um método: a faca está na mão de um mediador, que move-a da esquerda para a direita. Assim que um participante diz “Para!”, o mediador para e corta o bolo ao longo da posição da faca. O participante que disse “Para!” recebe o pedaço à esquerda da faca.
- Então o mediador recomeça a mover a faca sobre o pedaço de bolo remanescente até que um segundo participante diga “Para!”. Esse participante recebe o novo pedaço à esquerda da faca, e assim por diante. O último participante (que nunca disse “Para!”) fica com o pedaço restante.

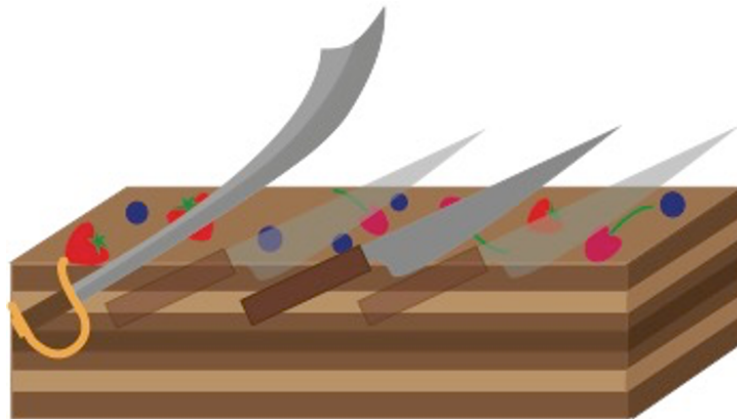


- Tente esse método várias vezes com todo o grupo: o mediador deve mover a faca extremamente devagar, para que os participantes tenham tempo de decidir suas estratégias. Será que alguns dos participantes têm a impressão de ter recebido um pedaço que vale menos do que $1/n$ do bolo inteiro? Se for este o caso, será possível propor modificar as estratégias?
- Aqui está uma estratégia para uma divisão proporcional: cada participante diz “Para!” sempre que achar que o valor do pedaço à esquerda da faca vale pelo menos $1/n$ do valor total do bolo. Explique por que essa estratégia garante que cada participante vai receber um pedaço que considera pelo menos $1/n$ do bolo todo.
- Observe que essa estratégia não é livre de inveja. Saberá dizer o motivo?

Atividade 3 - Uma divisão livre de inveja de um bolo entre 3 pessoas

O objetivo agora é dividir o bolo para que nenhum participante inveje os pedaços recebidos pelos outros dois.

- Pergunte se alguém quer propor uma estratégia.
- Aqui está uma estratégia: o mediador segura o sabre e move-o da esquerda para a direita. Ao mesmo tempo, cada participante movimenta uma faca à direita do sabre. Assim que um participante disser “Para!”, todos param de mover suas facas. O bolo é então cortado em dois pedaços: na posição do sabre e na posição da faca do meio. O participante que disse “Para!” recebe o pedaço à esquerda do sabre. Dos dois outros participantes restantes, aquele com a faca mais à direita recebe o pedaço do lado direito, e o restante recebe o pedaço do meio.



- Tente esse método várias vezes com membros diferentes do grupo assumindo o papel de mediador. O mediador deve mover o sabre bem lentamente, para que os participantes tenham tempo de decidir suas estratégias. Será que algum participante tem inveja da porção de outro participante? Alguém gostaria de propor uma estratégia de como cada participante deveria mover sua faca?
- Aqui tem uma estratégia para uma divisão livre de inveja:
 - Cada participante segura sua faca de forma que os dois pedaços delimitados por ela, à direita do sabre, tenham igual valor na sua opinião.
 - Chamemos de “participante 1” aquele cuja faca está mais à esquerda, “participante 2” aquele cuja faca está no meio, e “participante 3” aquele cuja faca está mais à direita.
 - O participante 1 diz “Para!” sempre que achar que o pedaço da esquerda tem o mesmo valor que o pedaço do meio.
 - O participante 2 diz “Para!” quando os três pedaços tiverem, na sua opinião, o mesmo valor.
 - O participante 3 diz “Para!” quando achar que o valor do pedaço da esquerda é igual ao valor do pedaço da direita.
- Discuta por que essa estratégia é livre de inveja. Examine o ponto de vista de cada participante e explique por que nenhum participante inveja os pedaços recebidos pelos outros.

Atividade 4 - Uma divisão livre de inveja de tarefas entre 3 pessoas

Se distribuirmos tarefas em um quadro, podemos dividi-las como um bolo. Neste caso, cada participante quer a porção que é a menor possível. O objetivo é que nenhum participante inveje a atribuição de tarefas dada a qualquer dos outros.

- Este problema é análogo à Atividade 3, e daí podemos deduzir uma estratégia. Alguém tem uma ideia?
- Aqui está uma estratégia. O mediador segura um sabre e move-o da esquerda para a direita. Ao mesmo tempo, cada pessoa move uma faca à direita do sabre. Quando um participante disser “Para!”, todos param de mover suas facas. O quadro é cortado em dois lugares: nas posições do sabre e da faca do meio. O participante que disse “Para!” recebe o pedaço mais à direita. Dos dois participantes restantes, aquele cuja faca está mais à direita recebe o pedaço do meio, e o último recebe o pedaço da esquerda.

Limpar as janelas	Lavar as roupas	Cozinhar	Passar a roupa
Limpar o chão	Lavar a louça	Tirar o lixo	Alimentar o gato
Aspirar	Regar as plantas	Por a mesa	Ir ao mercado
Lavar a banheira	Podar as árvores	Varrer o quintal	Separar o lixo para reciclagem

- Tente esse método muitas vezes, com membros diferentes fazendo o papel de mediador. O mediador deve mover o sabre bem lentamente, para que os participantes tenham tempo de decidir suas estratégias. Algum participante ficará com inveja de outro? Alguém gostaria de propor uma estratégia de como cada participante deveria mover sua faca?

- Aqui está uma estratégia para uma divisão livre de inveja de tarefas:
 - Cada participante segura sua faca de forma que a peça mais à esquerda tenha, na sua opinião, o mesmo valor que a peça entre o sabre e sua própria faca.
 - Chamemos de “participante 1” aquele cuja faca está mais à esquerda, “participante 2” aquele cuja faca está no meio, e “participante 3” aquele cuja faca está mais à direita.
 - O participante 1 diz “Para!” quando achar que o valor do pedaço da esquerda tem o mesmo valor que o pedaço da direita.
 - O participante 2 diz “Para!” quando os três pedaços que tiverem, na sua opinião, o mesmo valor.
 - O participante 3 diz “Pare!” quando achar que o pedaço do meio tem o mesmo valor que o pedaço da direita.
- Discuta por que essa estratégia é livre de inveja. Examine o ponto de vista de cada participante e explique por que nenhum participante tem inveja das porções dos outros.

Crie e Compartilhe!

Compartilhe imagens e vídeos da atividade ou das estratégias propostas pelo grupo, usando a hashtag #idm314.

Aprofunde vendo alguns vídeos sobre o assunto:

- [Veja um método diferente de dividir um bolo entre três pessoas, explicado por Hannah Fry em um vídeo do Numberphile.](#)
- [Math Encounters - Fair Division: How to Cut Cakes \(and other things\) Fairly.](#) Uma palestra sobre divisão justa do Professor Francis Su no museu MoMath.

© 2020 Christiane Rousseau

Este trabalho está licenciado sob uma Licença [Creative Commons Attribution 4.0 International](#).