



## Testagem de grupo

### **Participantes:**

A partir de 12 anos de idade, divididos em grupos de 4 ou 5 pessoas.

### **Ideia geral:**

Para controlar uma pandemia é necessário fazer muitos testes. Este é um processo custoso e que necessita de muitos insumos. Ao mesmo tempo, a grande maioria dos testes dão negativo. Será possível fazer melhor? Por exemplo, suponha que sejam misturadas amostras de 12 indivíduos e o teste seja feito sobre a mistura. Se der positivo, uma rodada adicional de testes é necessária. Poderíamos testar cada um dos 12 indivíduos ou dividir o grupo em quatro subgrupos de 3 pessoas, e testar a mistura de amostras de cada subgrupo. No segundo caso, uma terceira rodada de testes será necessária. Esta ideia simples é a base para a “testagem de grupo” ou “coletiva” (do inglês “pooled testing”), que já era aplicada durante a Segunda Guerra Mundial para testar a presença de sífilis entre os recrutas do exército americano. As atividades abaixo exploram esse método.

## Atividade 1

- Comece descrevendo os princípios.
- Suponha que precisemos testar 100 indivíduos, numerados de 1 a 100. Pegue dois números aleatórios, que representarão os dois indivíduos infectados. Cada equipe escolhe um membro para ser o árbitro. Secretamente, diga aos árbitros quem são os dois infectados. Os outros estudantes da equipe devem encontrar os infectados usando rodadas sucessivas de testes.
- A equipe propõe como agrupar e testar os indivíduos. O árbitro informa quais grupos tiveram resultado positivo no teste. O processo é repetido em várias rodadas até que os dois infectados sejam encontrados. Cada equipe conta o número de testes necessários.
- Compartilhe as estratégias usadas pelas diferentes equipes. Houve estratégias melhores do que outras?
- Troque os árbitros e repita o jogo com apenas um indivíduo infectado entre os 100.
- Troque os árbitros e repita o jogo com três indivíduos infectados entre os 100.
- Compartilhe as estratégias usadas pelas equipes. Houve estratégias melhores do que outras?

## Atividade 2

Como cada rodada de testes leva algum tempo, é essencial minimizar o número de rodadas.

- Suponha que precisemos testar 100 indivíduos, numerados de 1 a 100. Pegue dois números aleatórios, que representarão os dois indivíduos infectados. Cada equipe escolhe um membro para ser o árbitro. Secretamente diga aos árbitros quem são os infectados. Os outros estudantes da equipe precisam descobrir os infectados em, no máximo, duas rodadas de testes.
- A equipe propõe como agrupar e testar os indivíduos, e o árbitro informa quais grupos testaram positivo. A equipe tem, desta vez, apenas duas rodadas de testes para achar os infectados. Cada equipe conta o número total de testes que foram necessários.
- Compartilhe as estratégias usadas pelas equipes. Houve estratégias melhores do que outras?

## Atividade 3

Também é possível usar apenas uma rodada de testes.

- Suponha que precisemos testar 16 indivíduos. Será que alguma equipe consegue propor uma estratégia para testá-los e encontrar até dois indivíduos infectados em uma única rodada?
- Aqui está uma estratégia: Chamamos às 16 pessoas de A, B, C, ..., P, e realizamos 12 testes. Cada linha na tabela seguinte representa um único teste. Os Xs indicam os indivíduos cujas amostras estão misturadas em cada teste. Por exemplo, para o Teste 1, misturamos as amostras de A, B, C e D. Note que a amostra de cada pessoa é usada em três testes diferentes.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
Teste 1	X	X	X	X												
Teste 2					X	X	X	X								
Teste 3									X	X	X	X				
Teste 4													X	X	X	X
Teste 5	X				X				X				X			
Teste 6		X				X				X				X		
Teste 7			X				X				X				X	
Teste 8				X				X				X				X
Teste 9	X					X					X					X
Teste 10		X					X					X	X			
Teste 11			X					X	X					X		
Teste 12				X	X					X					X	

- Mostre que esse método permite achar todos os infectados se no máximo duas pessoas do grupo estiverem infectadas.
- Mostre que se três pessoas ou mais estão infectadas, a estratégia proposta não será capaz de identificar os infectados.

## Atividade 4

Aqui mostramos outro algoritmo que usa uma única rodada de testes.

- Colocamos  $n^2$  pessoas nos quadrados de uma malha  $n \times n$ . A testagem coletiva ocorre assim: misturamos as amostras de cada linha horizontal e de cada coluna vertical (portanto fazemos  $2n$  testes).
- Mostre que se apenas uma pessoa está infectada, podemos identificá-la em uma única rodada de testes.
- Mostre que se existir mais do que uma pessoa infectada mas estiverem todas na mesma linha horizontal ou na mesma coluna vertical, será possível identificá-las com uma única rodada de testes.
- Suponha que duas linhas e duas colunas deem positivo. Quais são os números mínimo e máximo de pessoas infectadas? Quantos testes adicionais são necessários em uma segunda rodada de testes para detectar todas as pessoas infectadas?

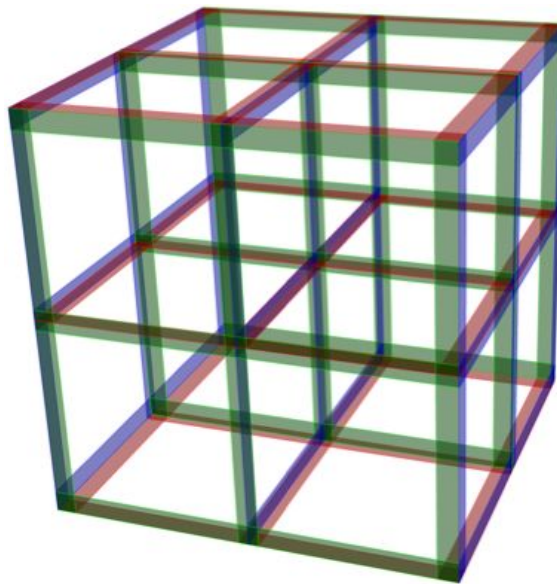
- Suponha que existam três indivíduos infectados. Descreva todos os possíveis pares  $(r,s)$ , em que  $r$  é o número de linhas cujos testes deram positivo e  $s$  é o número de colunas cujos testes deram positivo.

Aqui temos [uma explicação visual](#) deste método, com dois infectados entre 36 pessoas.

## Atividade 5

O algoritmo seguinte é mais avançado. Ele usa a mesma ideia da Atividade 4 mas em um número maior de dimensões. Portanto, é possível abordá-lo com estudantes mais avançados. Ele foi proposto por um grupo de [cientistas em Ruanda e usado para a testagem de COVID-19](#).

- O algoritmo funciona para grupos de  $3^m$  indivíduos. Ele consiste em fazer  $3m$  testes simultaneamente em misturas de amostras, cada uma contendo  $3^{m-1}$  indivíduos. Os  $3^m$  indivíduos são identificados com os pontos  $\{0, 1, 2\}^m$  de um cubo  $m$ -dimensional (veja a figura abaixo para  $m = 3$ ). Os agrupamentos são fatias do hiper-cubo. De fato, se  $x_1, \dots, x_m$  denotam os eixos coordenados do hiper-cubo, cada uma das misturas corresponde aos indivíduos localizados no hiperplano  $x_i = t$ , em que  $i \in \{1, \dots, m\}$  e  $t \in \{0, 1, 2\}$  é uma fatia de  $3^{m-1}$  indivíduos (as fatias vermelhas, verdes e azuis na figura).



- O grupo de cientistas de Ruanda propõe usar o algoritmo para  $m = 4$ , isto é, 12 testes por grupo de 81 indivíduos.
- Mostre que essa rodada de testes é suficiente para identificar exatamente um indivíduo infectado.
- Determine o número de testes adicionais necessários para uma segunda rodada de testes se dois indivíduos estiverem infectados. Será preciso considerar 3 casos: i) os dois indivíduos infectados caem em uma reta paralela a um dos eixos coordenados; ii) os dois indivíduos infectados caem dentro de uma fatia de testagem mas não em uma reta; iii) o caso geral.

## Aprofundamento

- [Um artigo sobre testagem coletiva](#), by Christian Genest and Christiane Rousseau.

### **Crie e Compartilhe!**

Compartilhe imagens e vídeos da atividade ou das estratégias propostas pelo grupo, usando a hashtag **#idm314**.

© 2020 Christiane Rousseau

Este trabalho está licenciado sob uma Licença [Creative Commons Attribution 4.0 International](#).